INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI

DIEGO NOJA

Le presenti note hanno un carattere preliminare ed incompleto. Una versione completa è in preparazione. Sono molto grato a Valentina Pozzoli che mi ha fornito una prima redazione delle lezioni.

Indice

1. Preliminari

La teoria delle distribuzioni è uno strumento fondamentale dell'Analisi moderna, con applicazioni amplissime che vanno dalla teoria delle equazioni a derivate parziali alla Fisica Teorica. Essa fu costruita da L.Schwartz negli anni quaranta del Novecento ma ebbe importanti precursori (citiamo solo il calcolo simbolico di O.Heaviside negli ultimi anni dell'Ottocento e la teoria delle derivate deboli di L.Sobolev negli anni '30 del Novecento).
Il punto di partenza è quello di ampliare il concetto di funzione, a comprendere oggetti che non possono essere considerati in alcun modo funzioni di tipo classico. Queste ultime attribuiscono valori (in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, in uno spazio di funzioni...) a punti del proprio dominio, a sua volta un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, o uno spazio di funzioni. Tuttavia spesso l'attribuzione di valori puntuali da una parte entra in conflitto con proprietà qualitative o di calcolo che si vorrebbero vere per gli oggetti che si introducono, e dall'altra non è usualmente necessaria per esprimere queste qualità o regole di calcolo.
Consideriamo ad esempio un punto dotato di carica q, una 'carica puntiforme', posta in un fissato punto dello spazio, diciamo in x_0. Dalle leggi dell'elettrostatica, o più in generale dalle equazioni di Maxwell, segue che il potenziale generato da questa carica soddisfa l'equazione differenziale a derivate parziali,

$$-\Delta\phi = \rho \tag{1.1}$$

dove ϕ è il potenziale elettrostatico e ρ la densità di carica: si tratta dell'equazione di Poisson.
La densità di carica nel nostro caso deve soddisfare le condizioni seguenti:

$$\rho(x) = 0 \qquad \forall x \neq x_0 \tag{1.2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x)dx = q \tag{1.3}$$

La 1.2 dice che la carica è interamente concentrata nel punto x_0, e la 1.3 dice che la carica totale è q. La 1.2 e 1.3 sono incompatibili, nel senso che non esiste alcuna <u>funzione</u> ρ che possa soddisfare entrambe le richieste.
D'altra parte, il concetto di carica (o massa) puntiforme è troppo rilevante per rinunciarvi facilmente, e nasce quindi il problema di descriverlo in modo matematicamente consistente. Inoltre dopo avere descritto il significato di una densità concentrata, si vorrebbe dare un senso all'equazione di Poisson in presenza di sorgenti di tale natura. La teoria fisica prevede in questi casi il potenziale sia Coulombiano, ovvero del tipo

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{|x-x_0|} \tag{1.4}$$

e occorre chiarire oltre alla definizione della densità di carica puntiforme ρ, in che senso la 1.4 risolve l'equazione di Poisson per tale densità.
Dunque occorre introdurre oggetti più generali delle funzioni che siano in grado di descrivere situazioni come la precedente, e quindi, in un senso da precisare, di 'soddisfare' relazioni come 1.2 e 1.3, incompatibili se ρ è una funzione; e successivamente di generalizzare in

modo corrispondente il concetto di soluzione di un'equazione differenziale.

Un'analoga esigenza di presenta anche nell'esempio seguente. Consideriamo l'equazione delle onde sulla retta:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = 0$$

La sua soluzione generale, come è noto, è data da

$$\phi(x,t) = f(x-t) + g(x+t) \tag{1.5}$$

dove f e g sono arbitrarie funzioni di classe $C^2(\mathbb{R})$.
La 1.5 rappresenta la legge di evoluzione per il fenomeno della propagazione ondosa sulla retta; essa continua d'altra parte a mantenere la stessa interpretazione, cioè quella della propagazione rigida di forme d'onda, una viaggiante nella direzione positiva dell'asse x, e l'altra viaggiante nella direzione negativa dell'asse x, anche se le funzioni f e g non sono di classe $C^2(\mathbb{R})$, ad esempio sono funzioni solamente di classe $C(\mathbb{R})$, e quindi la 1.5 non può essere considerata una soluzione in senso classico dell'equazione delle onde.
Poichè continuiamo ad attribuire alla 1.5 il significato di un fenomeno di propagazione ondosa, vorremmo anche in questo caso generalizzare il concetto di soluzione di equazione differenziale fino ad includere casi come questo, nei quali le soluzioni attese non hanno il grado sufficiente di differenziabilità per poter essere considerate soluzioni in senso classico.

A queste esigenze risponde il concetto di **distribuzione**.

2. Funzioni test e distribuzioni

L'idea su cui è basata l'introduzione del concetto di distribuzione è quella secondo cui ciò che è significativo misurare non sono *i valori puntuali* ma le *medie*. Consideriamo una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ a valori reali e domandiamoci in che modo sia possibile identificarla, oltre che assegnandone i valori.
Vale il seguente risultato, che origina nell'ambito del calcolo delle variazioni (dove si presenta sotto varie forme e varie denominazioni: Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, Lemma di DuBois-Reymond, ecc; è in generale un tipico lemma di annullamento della teoria dell'integrazione) ma che ha interesse generale. Ricordiamo preliminarmente che si indica con $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ lo spazio delle funzioni infinite volte derivabili con supporto compatto.
Lemma 1. (di du Bois-Reymond, o lemma fondamentale del calcolo delle variazioni)
Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Allora $f = 0$ q.o. (quasi ovunque) se e solo se

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\phi(x)dx = 0 \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{2.1}$$

Dunque se f e g sono localmente integrabili,abbiamo che da

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f(x) - g(x))\phi(x)dx = 0 \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{2.2}$$

segue che f e g coincidono quasi ovunque. Se poi f e g sono continue, esse coincidono ovunque.
Dunque, per identificare una funzione in $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ (a meno di un insieme di misura nulla) è possibile, invece che prescriverne i valori, prescrivere i valori dell'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(x)dx := T_f(\phi) \tag{2.3}$$

per tutte le funzioni ϕ regolari a supporto compatto.
Resta dunque istituita una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle funzioni $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e l'insieme delle mappe $T : C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$.

Che proprietà hanno le mappe T_f? Intanto segue immediatamente dalla definizione che sono mappe <u>lineari</u>:

$$T_{f_1+f_2}(\phi) = T_{f_1}(\phi) + T_{f_2}(\phi) \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{2.4}$$

$$T_{\alpha f}(\phi) = \alpha T_f(\phi) \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{2.5}$$

Dunque si tratta di <u>funzionali lineari</u> sullo spazio vettoriale $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

Dotiamo ora lo spazio $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ di una nozione di convergenza.
Diremo che la successione di funzioni $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ converge in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ alla funzione $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ se:
a) esiste un comune compatto $K \subset \mathbb{R}^N$ contenente il supporto di tutte le ϕ_n.
b) per ogni multindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$

$$D^\alpha \phi_n \to D^\alpha \phi$$

uniformemente in K, ovvero

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha \phi_n(x) - D^\alpha \phi(x)| \to 0 \quad \forall\ \alpha.$$

Allora con questa nozione di convergenza in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ il funzionale lineare

$$T_f : C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$$

risulta <u>continuo</u>. Ovvero se $\phi_n \to 0$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $T_f(\phi_n) \to 0$ in $\mathbb{R}$.
Infatti

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\phi(x)dx \right| \leq \sup_{x \in K} |\phi_n(x)| \int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx \to 0.$$

La generalizzazione del concetto di funzione si basa sulla costruzione delineata nell'esempio appena trattato.

Definizione. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto.
Una **distribuzione in** Ω è un funzionale lineare continuo su $C_0^\infty(\Omega)$.

Osservazione 1 La convergenza in $C_0^\infty(\Omega)$ è definita in modo analogo alla convergenza in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Osservazione 2 Nell'esempio trattato il campo degli scalari era $\mathbb{R}$. Non c'è nessun problema nel definire distribuzioni a valori complessi, ovvero mappe lineari e continue

$$T :\to C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$$

Esempio 1. Le mappe T_f sono il primo esempio di distribuzione. Esse vengono dette **distribuzioni regolari** e per abuso di linguaggio e notazione, vengono di solito confuse con le funzioni $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ o $(L^1_{loc}(\Omega)$, da cui provengono.
Esempio 2. Definiamo $\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0) \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Otteniamo evidentemente un funzionale lineare su $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$\delta_{x_0}(\phi_1 + \phi_2) = (\phi_1 + \phi_2)(x_0) = \phi_1(x_0) + \phi_2(x_0) = \delta_{x_0}(\phi_1) + \delta_{x_0}(\phi_2)$$
$$\delta_{x_0}(\alpha\phi) = \alpha\phi(x_0) = \alpha\delta_{x_0}(\phi)$$

Inoltre il funzionale lineare così costruito è continuo. Infatti poichè la convergenza uniforme implica quella puntuale, se $\phi_n \to 0$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora

$$\delta_{x_0}(\phi_n) = \phi_n(x_0) \to 0$$

La distribuzione così costruita si chiama 'delta di Dirac', o 'massa di Dirac', o 'misura di Dirac'; è l'ente matematico, come vedremo meglio più avanti, che descrive le densità concentrate in un punto.
Non è una distribuzione regolare, ovvero non esiste alcuna funzione localmente integrabile f tale che δ_{x_0} possa essere identificata con T_f; le distribuzioni che non sono regolari si dicono *singolari*.

Secondo l'uso introdotto da L. Schwartz, indicheremo con $\mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ e con $\mathcal{D}'(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni su Ω. Per brevità si pone $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.
Si dice che $T \in \mathcal{D}'$ si annulla su un aperto $A \subset \mathbb{R}^N$ se $T(\phi) = 0 \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con supporto contenuto in A.
Sia $\mathcal{A}$ l'unione degli aperti in cui T si annulla, che è quindi aperto in Ω.
Perciò $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{A}$ è chiuso e si dice **supporto** di T. Il supporto di una distribuzione regolare coincide con quello della funzione associata.
Il supporto della delta di Dirac δ_{x_0} è il singleton $\{x_0\}$. Il supporto di una distribuzione regolare coincide con il supporto della corrispondente funzione classica.

Per procedere, introduciamo un conveniente concetto di convergenza in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Questo può essere fatto in più modi; qui definiamo solo la convergenza debole, nel modo seguente.
Se $\{T_n\}$ è una successione di elementi di $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, allora diremo che $T_n \to T$ se

$$T_n(\phi) \to T(\phi) \qquad n \to +\infty \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

In effetti vale il seguente teorema, detto di completezza per successioni dello spazio $\mathcal{D}(\Omega)$, e conseguenza del principio (o teorema) dell'uniforme limitatezza di Banach-Steinhaus.
Teorema. Sia $\{T_n\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, e supponiamo che per ogni $\phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ esista finito $\lim_{n\to+\infty} T_n(\phi)$. Allora esiste $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che $\lim_{n\to+\infty} T_k = T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Il teorema precedente è molto importante perchè consente di costruire distribuzioni come limiti di successioni di distribuzioni, regolari e non. La stessa definizione di convergenza, e lo stesso teorema, valgono, *mutatis mutandis*, anche nel caso di famiglie $\{T_\epsilon\}$ di distribuzioni, con ϵ parametro reale (che in questo caso può tendere ad un valore reale fissato o a $+\infty$). Non esplicitiamo le corrispondenti semplici definizioni.

2.1. **Esempi.**
Esempio 1. Approssimazioni regolari della delta di Dirac.
Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con $||f||_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N} |f| = 1$. Assumiamo anche, per semplicità, $f \geq 0$. Poniamo

$$f_s(x) = \frac{1}{s^N} f\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s^N} f\left(\frac{x_1}{s}, \frac{x_2}{s}, ..\frac{x_N}{s}\right)$$

Vogliamo dimostrare che, nel senso della convergenza distribuzionale,

$$\lim_{s\to 0} f_s(x) = \delta_0$$

Preliminarmente osserviamo che si dimostrano facilmente le seguenti proprietà (si effettui negli integrali il cambio di variabili $u = \frac{x}{s}$) :
i)$\int_{\mathbb{R}^N} f_s(x)dx = 1 = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)du$
ii)$\lim_{s\to 0} \int_{|x|<R} f_s(x)dx = 1 = \lim_{s\to 0} \int_{|u|<\frac{R}{s}} f(u)du$
iii)$\lim_{s\to 0} \int_{|x|>R} f_s(x)dx = 0 = \lim_{s\to 0} \int_{|u|>\frac{R}{s}} f(u)du$
Sia ora $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ un'arbitraria funzione test. Abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_s(x)(\phi(x) - \phi(0))dx = \int_{|x|\leq R} f_s(x)(\phi(x) - \phi(0))dx + \int_{|x|>R} f_s(x)(\phi(x) - \phi(0))dx$$

Ora $(\phi(x) - \phi(0))$ è limitata su $\mathbb{R}^N$, diciamo da M; inoltre poniamo

$$N(R) := \sup_{|x|\leq R} |\phi(x) - \phi(0)|$$

Allora

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f_s(x)(\phi(x) - \phi(0)) \right| \leq N(R) + M \int_{|x|>R} f_s(x)dx$$

Poichè ϕ è continua e $\phi(x) - \phi(0) = 0$ per $x = 0$, si ha $\lim_{R\to 0} N(R) = 0$. Inoltre $\lim_{s\to 0} \int_{|x|>R} f_s(x)dx = 0$ per iii).
Sia ora $\epsilon > 0$ fissato, e scegliamo R piccolo a sufficienza affinchè $N(R) < \frac{\epsilon}{2}$ ed s piccolo a sufficienza affinchè $\int_{|x|>R} f_s(x)dx < \frac{\epsilon}{2M}$.

Segue allora

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f_s(x)(\phi(x) - \phi(0))dx \right| \leq N(R) + M \int_{|x|>R} f_s(x)dx \leq \epsilon$$

ovvero

$$\lim_{s\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} f_s(x)\phi(x)dx = \lim_{s\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} f_s(x)\phi(0)dx = \phi(0) \lim_{s\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} f_s(x)dx = \phi(0) = \delta_0(\phi)$$

qualunque sia $\forall \phi \in \mathbb{R}^N$. Equivalentemente

$$\lim_{s\to 0} T_{f_s}(\phi) = \delta_0(\phi)$$

cioè la successione di distribuzioni regolari f_s converge alla distribuzione di Dirac per $s \to 0$.

Alcuni esempi di approssimanti:
1) $N = 1$

$$f_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2s} & -s \leq x \leq s \\ 0 & |x| > s \end{cases}$$

2) $N = 2$

$$f_s(x) = \frac{s}{2\pi(x_1^2 + x_2^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3) $N = 3$

$$f_s(x) = \frac{s}{\pi^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + s^2)^2}$$

4) La successione di funzioni di Gauss

$$f_s(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} s}\right)^2 \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2}{s^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} s}\right)^2 e^{-\frac{|x|^2}{s^2}}$$

convergono alla delta di Dirac in $\mathbb{R}^N$.
Notiamo infine che per approssimare la distribuzione δ_{x_0} è sufficiente traslare le approssimanti di δ_0:
Se $f_s^{x_0} = \frac{1}{s^N} f_s(x - x_0)$ allora $\lim_{s\to 0} f_s^{x_0} = \delta_{x_0}$ nel senso della teoria delle distribuzioni.

Esempio 2. Valore Principale
Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{1}{x}$.
Essa non è localmente integrabile, e quindi non può definire una distribuzione regolare T_f; è tuttavia possibile, mediante una procedura di 'regolarizzazione', costruire a partire da essa una distribuzione (non regolare) che concorda con T_f su $f : \mathbb{R} - \{0\}$.
Si pone per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$P_{\frac{1}{x}}(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

Ricordiamo che nella teoria elementare dell'integrazione, il limite a secondo membro della formula precedente si dice **valor principale** dell'integrale, o anche **valor principale secondo Cauchy dell'integrale**. Esso può esistere anche se la funzione integranda non è

integrabile nell'intorno dell'origine. Ad esempio

$$PV\int_{-1}^{-1}\frac{1}{x}dx := \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon<|x|\leq 1}\frac{1}{x}dx = \lim\epsilon\to 0^+[\ln 1-\ln\epsilon+\ln\epsilon-\ln 1]=0$$

Per analogia il funzionale lineare $P\frac{1}{x}$ viene detto valore principale di Cauchy. Mostriamo che esso effettivamente definisce una distribuzione.
Sia $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ con supporto in $[-r,r]$. Allora

$$\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx = \int_{\epsilon}^{r}\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}dx$$

Poichè $\phi(x)-\phi(-x) = x\int_{-1}^{1}\phi'(xt)dt$ si ha anche

$$\left|\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\right| \leq \left|\int_{-1}^{1}\phi'(xt)dt\right| \leq 2\sup_{x\in[-r,r]}|\phi'(x)|$$

Dunque l'integrando in $\int_{\epsilon}^{r}\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}$ è limitato $\forall\epsilon\geq 0$ e quindi esiste il limite per $\epsilon\to 0^+$, si ha

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx = \int_{0}^{+\infty}\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}dx$$

Inoltre

$$\left|\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx\right| \leq \int_{0}^{r}\left|\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\right|dx \leq 2r\sup_{x\in[-r,r]}|\phi'(x)|$$

Dunque se $\phi_n\to\phi$ in $\mathcal{D}((\mathcal{R})$ allora $P\frac{1}{x}(\phi_n)\to P\frac{1}{x}(\phi)$.

Perciò $P\frac{1}{x}$ è un funzionale lineare continuo e dunque un elemento di $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Si noti che nel corso della dimostrazione si è mostrato che

$$P\frac{1}{x}(\phi) = \int_{0}^{+\infty}\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}dx \qquad \forall\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Si tratta di una definizione alternativa di valor principale.

Calcoliamo $\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}}\frac{\phi(x)}{x\pm i\epsilon}dx \qquad \forall\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Si ha

$$\frac{1}{x\pm i\epsilon} = \frac{x}{x^2+\epsilon^2}\mp i\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$$

Osserviamo che $\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x^2+1}dx=\pi$ e quindi

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{\epsilon}\frac{1}{\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2+1} = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$$

è una successione che approssima la delta di Dirac, in accordo con l'esempio precedente. Perciò, nel senso della teoria delle distribuzioni,

$$\mp i\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \to \mp i\pi\delta_0 \qquad \epsilon \to 0$$

Consideriamo ora il comportamento della parte reale $\frac{x}{x^2+\epsilon^2} = h_\epsilon(x)$. La funzione h_ϵ è localmente integrabile e dispari. La distribuzione (regolare) corrispondente è data da

$$T_{h_\epsilon}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} h_\epsilon(x)\phi(x)dx = \int_0^{+\infty} h_\epsilon(x)(\phi(x)-\phi(-x))dx = \int_0^{+\infty} xh_\epsilon(x)\frac{(\phi(x)-\phi(-x))}{x}dx$$

Osserviamo ora che $x \to \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}$ è una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ e la funzione $x \to xh_\epsilon(x)$ è maggiorata uniformemente in ϵ dalla costante 1 e inoltre $xh_\epsilon(x) \to 1$ $\epsilon \to 0$ puntualmente. Perciò per il teorema di convergenza dominata si ha

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty} xh_\epsilon(x)\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}dx = \int_0^{+\infty}\lim_{\epsilon\to 0^+} xh_\epsilon(x)\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}dx =$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}dx = P\frac{1}{x}(\phi)$$

Equivalentemente, $\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{x}{x^2+\epsilon^2} = P\frac{1}{x}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Concludendo, si sono ottenute le cosiddette formule di Plemelj-Sochozki, di uso frequente in Meccanica Quantistica e Teoria dei campi:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mp i\pi\delta_0 + P\frac{1}{x}$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Esempio 3. Una approssimazione della delta di Dirac mediante una successione di funzioni non positive
Una successione approssimante la distribuzione di Dirac che spesso si ritrova nelle applicazioni si ottiene considerando la successione di funzioni continue

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\pi x}$$

Dimostriamo che, nel senso della teoria delle distribuzioni

$$f_n \to \delta_0 \qquad n \to +\infty$$

Infatti sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Perciò $supp(\phi) \subset [-a,a]$ per qualche $a \in \mathbb{R}$. Allora

$$\langle f_n, \phi\rangle = \int_{-a}^{a} f_n(x)\phi(x)dx = \int_{-a}^{a}\frac{\sin(nx)}{\pi x}\phi(x)dx =$$

$$= \int_{-a}^{a}\frac{\sin(nx)}{\pi x}(\phi(x)-\phi(0))dx + \int_{-a}^{a}\frac{\sin(nx)}{\pi x}\phi(0)dx$$

Ora si ha

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sin(nx)}{\pi x}(\phi(x)-\phi(0))dx = \frac{1}{n\pi}\int_{-a}^{a} \cos(nx)\frac{d}{dx}\left(\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\right)dx$$

che converge a zero per $n \to +\infty$.
Per il rimanente integrale si ha

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sin(nx)}{\pi x}\phi(0)dx = \left(\int_{-na}^{na} \frac{\sin y}{\pi y}dy\right)\phi(0)$$

$$\to \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{\pi y}dy\right)\phi(0) = \phi(0)$$

grazie al ben noto integrale di Dirichlet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{\pi y}dy = \pi$$

3. Operazioni con le distribuzioni

L'insieme $\mathcal{D}'$ è uno spazio vettoriale in modo ovvio, e quindi sono ben definite la somma di distribuzioni e il prodotto per una costante. Non è invece ben definita una operazione di prodotto di distribuzioni. In questo paragrafo ci occuperemo del prodotto per una funzione regolare, della derivazione e della convoluzione.

3.1. **Prodotto per funzioni regolari.**

Supponiamo date $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e T una distribuzione. Allora possiamo definire una nuova distribuzione prodotto della distribuzione T per la funzione f come segue:

$$(fT)(\phi)\rangle = T(f\phi) \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\ . \tag{3.1}$$

Con questa definizione il prodotto di una distribuzione per una funzione regolare gode delle proprietà formali usuali.
Ci si può domandare se sia necessario che la funzione f debba essere necessariamente di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. In generale è così, perché questa richiesta garantisce che $f\phi$ sia una funzione test. Tuttavia questa osservazione consente di comprendere come questa definizione possa essere adattata al caso di distribuzioni con proprietà particolari, rilassando la richiesta su f. Un caso significativo è quello in cui T sia a supporto compatto, dove è sufficiente richiedere che f sia continua. Ad esempio il prodotto della δ di Dirac per una funzione continua è ben definito dalla relazione precedente.
Tuttavia, non è possibile estendere la definizione al prodotto di distribuzioni generiche.

3.2. **Derivazione di distribuzioni.**

Sia $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, α un multiindice. L'integrazione per parti mostra che

$$\int_\Omega (\partial^\alpha \psi)(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \psi(x)(\partial^\alpha \phi)(x)dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Perciò $T_{\partial^\alpha \psi}$ è la distribuzione (regolare) che coincide con

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \psi(x)(\partial^\alpha \phi)(x)dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

quando viene valutata su una funzione test.
Questo suggerisce di definire la derivata di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ nel modo seguente.
Definizione. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora la derivata di multiindice α di T è la distribuzione $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che

$$\partial^\alpha T(\phi) = T\left((-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \phi\right) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi) \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Una conseguenza immediata e fondamentale di questa definizione è che ogni distribuzione ammette derivate di tutti gli ordini. Inoltre è irrilevante l'ordine di derivazione:

$$\partial^\beta(\partial^\alpha T) = \partial^\alpha(\partial^\beta T) = \partial^{\alpha+\beta} T \qquad \forall t \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

con α, β multiindici qualunque.
Esempio 1. La funzione θ di Heaviside
Consideriamo la funzione θ di Heaviside, ovvero la funzione caratteristica dell'intervallo $(0, +\infty)$:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che la sua derivata classica esiste quasi ovunque ed è quasi ovunque nulla. Vogliamo calcolarne la derivata in senso distribuzionale. Avremo:

$$T_\theta(\phi) = \int_\mathbb{R} \theta(x)\phi(x)dx = \int_0^{+\infty} \phi(x)dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Per definizione,

$$\theta'(\phi) = T'_\theta(\phi) = T_\theta(-\phi') = -\int_0^{+\infty} \phi'(x)dx = -\left(\phi(+\infty) - \phi(0)\right) = \phi(0)$$
$$= \delta_0(\phi) \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Dunque

$$\theta' = \delta_0$$

Più in generale, considerata

$$\theta(x - x_0) = \chi_{[x_0,+\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

si avrà

$$\chi'_{[x_0,+\infty)} = \delta_{x_0}$$

in senso distribuzionale.

Esempio 2. Discontinuità di prima specie

Sia $f \in C^1\left((-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)\right)$ con una discontinuità a salto (o di prima specie, che dir si voglia).
Poniamo

$$[f]_{x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

e lo denominiamo 'salto di f in x_0'.
Abbiamo per definizione di derivata distribuzionale

$$T_f'(\phi) = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx = -\left[\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\phi'(x)dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx\right] =$$

$$\int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\phi(x)dx - \lim_{x \to x_0^-} f(x)\phi(x) + \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\phi(x)dx + \lim_{x \to x_0^+} f(x)\phi(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \{f'\}(x)\phi(x)dx + [f]_{x_0}\phi(x_0)$$

dove

$$\{f'\}(x) = \begin{cases} f'(x) & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$$

è un'estensione (qualunque, il valore nullo in x_0 può essere sostituito da qualunque altro) di $f' \in C^1\left((-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)\right)$.
Poichè $\{f'\}$ è una distribuzione regolare e $\phi(x_0) = \delta_{x_0}(\phi)$ possiamo scrivere

$$T_f' = \{f'\} + [f]_{x_0}\delta_{x_0}$$

Il contributo della discontinità di prima specie con salto $[f]_{x_0}$ è dunque quello di aggiungere alla derivata classica il termine $[f]_{x_0}\delta_{x_0}$.
Un caso particolare della formula precedente è quello, già visto, della funzione di Heaviside. In questo caso $[\theta]_{x_0} = 1, \{\theta'\} = 0$ e $T_\theta' = \delta_0$.
La formula ottenuta si può facilmente generalizzare al caso di funzioni regolari a tratti con un insieme finito o numerabile di punti di discontinuità di prima specie.

Esempio 3 La derivata della δ di Dirac è una distribuzione , con la seguente azione:

$$\delta_0'(\phi) = -\phi'(0)$$

Si tratta di una distribuzione a supporto compatto, con supporto nel punto 0. Allo stesso modo si possono definire le derivate di ordine superiore della distribuzione di Dirac. Si potrebbe dimostrare che ogni distribuzione a supporto nell'origine è combinazione lineare della δ_0 di Dirac e di sue derivate.

Esempio 4. La funzione $\ln|x|$

Consideriamo la funzione localmente integrabile $x \to \ln|x|$ e calcoliamone la derivata distribuzionale. Per definizione

$$(\ln|x|)'(\phi) = -(\ln|x|)(\phi') = -T_{\ln|x|}(\phi') = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\phi'(x)dx$$

Dato che $\ln|x|$ è localmente integrabile e si può applicare il teorema di convergenza dominata, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\phi'(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon} \ln|x|\phi'(x)dx$$

$$\int_{|x|\geq\epsilon} \ln|x|\phi'(x)dx = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln|x|\phi'(x)dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \ln|x|\phi'(x)dx =$$

$$= -\left[-(\ln\epsilon)\phi(-\epsilon) + \int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx + (\ln\epsilon)\phi(\epsilon) + \int_{+\epsilon}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx\right] =$$

$$= -(\ln\epsilon)(\phi(\epsilon)-\phi(-\epsilon)) - \int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx$$

Ora $(\ln\epsilon)(\phi(\epsilon)-\phi(-\epsilon)) \to 0$ perchè $\phi(\epsilon)-\phi(-\epsilon) \simeq \epsilon, \epsilon \to 0^+$. Dunque

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon} \ln|x|\phi'(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left[-\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx\right]$$

Allora, riprendendo la definizione,

$$(\ln|x|)'(\phi) = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\phi'(x)dx = -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon} \ln|x|\phi'(x)dx = P\frac{1}{x}(\phi)$$

Dunque la derivata distribuzionale di $T_{\ln|x|}$ coincide con la distribuzione valore principale di Cauchy.

Torniamo alla discussione generale.
Una delle proprietà più importanti della derivata distribuzionale, diretta conseguenza della definizione, è la seguente:
Proposizione. Gli operatori $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ sono operatori lineari e continui. In particolare i) Se $T = \lim_{n\to+\infty} T_n$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ allora

$$\partial^\alpha T = \lim_{n\to+\infty}\partial^\alpha T_n$$

ii) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} T_n$ converge in $\mathcal{D}'(\Omega)$ alla distribuzione T allora

$$\partial^\alpha T = \sum_{n=0}^{+\infty}\partial^\alpha T_n$$

In altre parole, la derivazione commuta con i limiti in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Esempio. Consideriamo la successione di distribuzioni regolari

$$T_n = \frac{\sin(nx)}{n}$$

Come funzione si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0$ puntualmente e uniformemente in $\mathbb{R}$. Le corrispondenti distribuzioni $T_n \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La successione delle derivate, $\{\cos(nx)\}$, non converge in $\mathbb{R}$ nè puntualmente nè tantomeno uniformemente.
Invece la successione $T'_n \to 0$ in $\mathcal{D}'$. Infatti se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$T'_n(\phi) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(nx)}{n}\phi'(x)dx \to 0 \quad n \to +\infty \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

La continuità dell'operatore di derivata nello spazio delle distribuzioni è di grande importanza nella teoria delle equazioni a derivate parziali.
La dimostrazione della proprietà precedente è una conseguenza della definizione di derivata. Sia infatti $\lim_{n\to+\infty} T_n = T$ nel senso della teoria delle distribuzioni. Allora, per definizione,

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(\phi) = T(\phi) \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} T'_n(\phi) = -\lim_{n\to+\infty} T_n(\phi') = -T(\phi') = T'(\phi)$$

poichè ϕ' è ancora una funzione test.
Analogamente si tratta il caso di famiglie di distribuzioni $\{T_s\}_{s\in\mathbb{R}}$. Se $T_s \to T \quad \text{per} s \to s_0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ allora $T'_s \to T' \quad \text{per} s \to s_0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

3.3. **Funzioni di Green di operatori di Sturm-Liouville.**

Come abbiamo visto, un operatore di Sturm-Liouville regolare con condizioni al bordo simmetriche è simmetrico in L^2:

$$\langle \mathcal{L}u, v\rangle_{L^2[a,b]} = \langle u, \mathcal{L}v\rangle_{L^2[a,b]} \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$$

Sia ora $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, $\phi \in \mathcal{D}([a,b])$ e $f \in C([a,b])$. Allora se u soddisfa l'equazione differenziale $\mathcal{L}u = f$ si ha anche

$$\int_a^b (\mathcal{L}u)\phi dx = \int_a^b f\phi dx \qquad \forall \phi \in C_0^\infty([a,b])$$

da cui anche, poichè ϕ è a supporto compatto e quindi sopprime qualunque termine di bordo,

$$\int_a^b u(\mathcal{L}\phi)dx = \int_a^b f\phi dx \qquad \forall \phi \in C_0^\infty([a,b])$$

D'altra parte, per definizione di derivata distribuzionale, l'identità

$$\int_a^b (\mathcal{L}u)\phi dx = \int_a^b u(\mathcal{L}\phi)dx \qquad \forall \phi \in C_0^\infty([a,b])$$

è esattamente quella che ci dice chi è $\mathcal{L}u$ nel senso della teoria delle distribuzioni. Dunque, generalizzando, possiamo definire una soluzione distribuzionale dell'equazione di Sturm-Liouville $\mathcal{L}u = f$ con $f \in \mathcal{D}'(a, b)$ come la distribuzione u (se esiste), tale che

$$\langle u, \mathcal{L}\phi\rangle = \langle f, \phi\rangle \qquad \forall \phi \in C_0^\infty([a, b]) \ .$$

Consideriamo ora la funzione di Green di un operatore di Sturm-Liouville regolare e ricordiamone le sue principali proprietà. Innanzitutto si ha

$$u(x) = \int_a^b G(x, y)f(y)dy$$

con

$$G(x, y) = -\frac{1}{pW}\begin{cases} v_1(x)v_2(y) & a \leq x < y \leq b \\ v_2(x)v_1(y) & a \leq y < x \leq b \end{cases} = -\frac{1}{pW}v_1(\min(x, y))v_2(\max(x, y))$$

dove p è il coefficiente della derivata seconda nel'operatore di Sturm-Liouville

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

e

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix}$$

è il Wronskiano delle due soluzioni fondamentali v_1, v_2 definite come soluzione dell'equazione omogenea $\mathcal{L}u = 0$ con problema di Cauchy associato rispettivamente in a e b e soddisfacenti $h_1v_1(a) - h_2v_2'(a) = 0$, $H_1v_2(b) + H_2v_2'(b) = 0$ ovvero le condizioni al bordo in a e b. Per $x \neq y$ la funzione G è soluzione dell'equazione omogenea. La funzione $G(x, y)$ è la funzione di Green dell'assegnato problema al contorno ed è una funzione reale, simmetrica ($G(x, y) = G(y, x)$) e continua. E' inoltre di classe $C^1((a, b) \times (a, b) \setminus \Delta)$ dove Δ è la diagonale del quadrato $(a, b) \times (a, b)$, $\Delta = \{(x, y) \in (a, b) \times (a, b), x = y\}$. Su Δ vale la condizione di salto della derivata prima della funzione di Green:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(y^+, y) - \frac{\partial G}{\partial x}(y^-, y) = -\frac{1}{p(y)}, \qquad \forall y \in (a, b)$$

Le proprietà precedenti consentono di dimostrare facilmente il seguente risultato:
Nel senso della teoria delle distribuzioni vale

$$\mathcal{L}_xG(x, y) = \delta_y$$

dove il pedice x indica che le derivate in $\mathcal{L}_x$ si intendono rispetto alla variabile x.
La dimostrazione consiste nel verificare che

$$\int_a^b G(x, y)(\mathcal{L}_x\phi(x))dx = \phi(y) \qquad \forall \phi \in C_0^\infty([a, b])$$

In effetti si ha

$$0 = \int_a^{y-\epsilon}(\mathcal{L}_xG(x, y))\phi(x)dx + \int_{y+\epsilon}^b(\mathcal{L}_xG(x, y))\phi(x)dx \qquad \forall \epsilon > 0$$

e integrando per parti due volte si ottiene,

$$0 = \int_a^{y-\epsilon} (\mathcal{L}_x\phi(x)))G(x,y)dx + \int_{y+\epsilon}^b (\mathcal{L}_x\phi(x))G(x,y)dx + \mathcal{B}(a,b,\epsilon)$$

dove i termini di bordo $\mathcal{B}(a,b,\phi\epsilon)$ della integrazione per parti sono dati da

$$-[p(x)G'(x,y)\phi(x)]_a^{y-\epsilon} - [p(x)G'(x,y)\phi(x)]_{y+\epsilon}^b + [G(x,y)p(x)\phi'(x)]_a^{y-\epsilon} + [G(x,y)p(x)\phi'(x)]_{y+\epsilon}^b .$$

In questa espressione prendiamo il limite $\epsilon \to 0$. Gli ultimi due termini danno somma nulla per la continuità di G e perché ϕ è a supporto compatto in (a,b). Ne segue che

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{B}(a,b,\phi\epsilon) = p(y)\phi(y)[G'(y^+,y) - G'(y^-,y)] = -\phi(y)$$

e dunque la tesi.
Riassumendo, la funzione di Green $G(x,y)$ è una distribuzione regolare, di classe $C^1((a,b)\times(a,b)\setminus\Delta)$, è simmetrica, soddisfa le condizioni al bordo associate a $\mathcal{L}$ negli estremi a e b e risolve, nel senso della teoria delle distribuzioni, l'equazione

$$\mathcal{L}_x G(x,y) = \delta_y \ .$$

3.4. **Soluzione fondamentale dell'operatore Laplaciano.**
Un altro importante esempio di applicazione della derivata distribuzionale si ottiene considerando il laplaciano in $\mathbb{R}^n$. Come si è visto, la funzione

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log\|x\| & n=2 \\ \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\frac{1}{\|x\|^{n-2}} & n>2 \end{cases}$$

dove ω_n è la misura della palla unitaria N dimensionale, è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dimostriamo ora che vale il seguente importante risultato.
Teorema Nel senso della teoria delle distribuzioni

$$-\Delta\Phi = \delta_0 \ .$$

Dimostriamo il teorema facendo uso della definizionde di derivata distribuzionale. Osserviamo che Φ è una distribuzione regolare (perché? Esercizio). Si ha dunque la rappresentazione

$$T_\Phi : \mathcal{D} \to \mathbb{R} \qquad v \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)v(x)dx \qquad \forall v \in \mathcal{D} \ .$$

Ora

$$T_\Phi(\Delta v) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\Delta v(x)dx \qquad \forall v \in \mathcal{D} \ ,$$

e l'espressione a secondo membro ha senso perchè Φ è localmente integrabile e $v \in \mathcal{D}$. Ne segue, per il teorema di convergenza dominata, e poi per la II formula di Green

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\Delta v(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\epsilon(0)} \Phi(x)\Delta v(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\{\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\epsilon(0)} \Delta\Phi(x)v(x)dx + \mathcal{B}(v,\epsilon)\}$$

dove il termine di bordo ha l'espressione nota

$$\mathcal{B}(v,\epsilon) = \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0))} [\Phi(x)\partial_\nu v(x) - v(x)\partial_\nu \Phi(x)]\ d\sigma$$

Poichè Φ è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)$, e l'integrale su $\partial(\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0))$ si riduce a quello su $\partial B_\epsilon(0)$ grazie al supporto compatto di v si ottiene dunque che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\Delta v(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{B}(v,\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial B_\epsilon(0)} [\Phi(x)\partial_\nu v(x) - v(x)\partial_\nu \Phi(x)]\ d\sigma$$

con la normale orientata verso l'interno di $\partial B_\epsilon(0)$. Si ha ora

$$|\int_{\partial B_\epsilon(0)} \Phi(x)\partial_\nu v(x)d\sigma| \le \int_{\partial B_\epsilon(0)} |\Phi(x)\partial_\nu v(x)|d\sigma \le \|\partial_\nu v\|_\infty \int_{\partial B_\epsilon(0)} |\Phi(x)|d\sigma$$

Ora si ha,
per $n = 2$,

$$\int_{\partial B_\epsilon(0)} |\frac{1}{2\pi}\log\|x\||d\sigma \le \frac{1}{2\pi} 2\pi\epsilon|\log\|x\|| = \epsilon|\log|\epsilon|| \to 0 \qquad \epsilon \to 0$$

per $n \ge 3$

$$\int_{\partial B_\epsilon(0)} |\Phi(x)|d\sigma \le cost\frac{1}{\epsilon^{n-2}} \int_{\partial B_\epsilon(0)} 1\ d\sigma \le cost\frac{\epsilon^{n-1}}{\epsilon^{n-2}} = cost\cdot\epsilon \to 0 \qquad \epsilon \to 0\ .$$

In tutte le dimensioni pertanto il primo integrale è nullo nel limite $\epsilon \to 0$.
Consideriamo il secondo integrale. Si hanno le seguenti relazioni

$$\nu = -\frac{x}{|x|}, \qquad \nabla\Phi(x) = -\frac{x}{n\omega_n|x|^n}, \qquad \partial_\nu\Phi(x) = \nabla\Phi(x)\cdot\nu = \frac{1}{n\omega_n|x|^{n-1}}$$

e dunque

$$-\int_{\partial B_\epsilon(0)} v(x)\partial_\nu\Phi(x)\ d\sigma = -\int_{\partial B_\epsilon(0)} v(x)\frac{1}{n\omega_n|x|^{n-1}}d\sigma = -\frac{1}{n\omega_n\epsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\epsilon(0)} v(x)d\sigma\ ,$$

e l'ultimo integrale coincide con

$$-\frac{1}{|\partial B_\epsilon(0)|}\int_{\partial B_\epsilon(0)} v(x)d\sigma \to -v(0) \qquad \epsilon \to 0$$

per il teorema della media del calcolo integrale, essendo v regolare.
Questo prova la tesi, ovvero il fatto che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\Delta v(x)dx = -v(0) \qquad \forall v \in \mathcal{D}$$

che è esattamente la tesi.

3.5. **Soluzione fondamentale dell'operatore del calore.**

L'operatore del calore $\mathcal{H}$ è definito da

$$\mathcal{H}u(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u(t,x) \tag{3.2}$$

dove $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Classicamente occorre richiedere che $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$; in senso distribuzionale questa richiesta può essere rilassata.
Consideriamo ora la funzione così definita

$$E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp(-\dfrac{\|x\|^2}{4t}) & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

La funzione E è localmente integrabile in $\mathbb{R}^{n+1}$, e pertanto è una distribuzione regolare. Inoltre essa soddisfa l'equazione del calore per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, come è possibile verificare per calcolo diretto.

Theorem 3.1. *Vale, nel senso della teoria delle distribuzioni,*

$$\mathcal{H}E(x,t) = \delta_{(0,0)}$$

Dimostrazione. Vogliamo provare che, per ogni funzione test ϕ, si ha

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) E(\phi) = \phi(0,0) = \delta_{(0,0)}(\phi)$$

Sia dunque $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Allora, per definizione di derivata distribuzionale, si ha

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) E(\phi) &= E\left(-\frac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta\phi\right) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_\epsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} -E(x,t)\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi\right) \, dx \, dt = \text{(per parti)} \\
&= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_\epsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[-\frac{\partial(E\phi)}{\partial t} + \phi(\frac{\partial E}{\partial t} - \Delta E)\right] \, dx \, dt = (\mathcal{H}E = 0, t > 0) \\
&= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} - \left[E(x,t)\phi(x,t)\right]_\epsilon^{t\uparrow\infty} \, dx = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} E(x,\epsilon)\phi(x,\epsilon) \, dx = (\frac{x}{2\sqrt{\epsilon}} = y) \\
&= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{n/2}} \exp(-\|y\|^2)\phi(2\sqrt{\epsilon}y,\epsilon)(2\sqrt{\epsilon})^n \, dy \\
&= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp(-\|y\|^2)}{\pi^{n/2}}\phi(2\sqrt{\epsilon}y,\epsilon) \, dy = \text{(convergenza dominata)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp(-\|y\|^2)}{\pi^{n/2}}\phi(0,0) \, dy = \phi(0,0) = \delta_{(0,0)}(\phi) \ .
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato l'integrale di Poisson: $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$. □

4. La trasformata di Fourier

Consideriamo la forma complessa della serie di Fourier di una funzione

$$\phi : [-L, L] \to \mathbb{C}$$

$$\phi(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} \qquad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \phi(y) e^{-i\frac{n\pi y}{L}} dy$$

Il simbolo $\sim$ sta ad indicare, come di consueto in questo contesto, che non necessariamente si ha convergenza della serie a destra del simbolo $\sim$. Il membro di destra in altre parole è la serie i cui coefficienti c_n sono costruiti, secondo il precetto assegnato, a partire da ϕ. Si ha allora, procedendo formalmente:

$$\phi \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} \phi(y) e^{-i\frac{n\pi y}{L}} dy\right] e^{i\frac{n\pi x}{L}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-L}^{+L} \phi(y) e^{i(x-y)k_n} dy\right]\frac{\pi}{L}$$

con $k_n = \frac{n\pi}{L}$.

Ora, la distanza fra due k_n successivi è data da $\Delta k = k_n - k_{n-1} = \frac{\pi}{L}$ e quindi per $L \to +\infty$ possiamo interpretare la serie scritta come la somma di Riemann dell'integrale ($\Delta k = \frac{\pi}{L} \simeq dk$)

$$\phi \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) e^{ik(x-y)} dy dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iky}\hat{\phi}(k) dk$$

con $\hat{\phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iky}\phi(y) dy$.

Se chiamiamo **trasformata di Fourier** di ϕ l'integrale

$$\hat{\phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iky}\phi(y) dy$$

e **antitrasformata di Fourier** di $\hat{\phi}$ l'integrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iky}\phi(k) dk$$

allora il calcolo appena visto si interpreta dicendo che 'ogni' funzione ϕ è l'antitrasformata della sua trasformata di Fourier $\hat{\phi}$.

Vediamo ora di costruire un contesto rigoroso nel quale ambientare queste considerazioni.

L'ambiente dove è spontaneo definire la trasformata di Fourier è lo spazio $L^1(\mathbb{R}^N)$ delle funzioni integrabili secondo Lebesgue. In effetti, se $\phi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora la funzione $x \to \phi(x)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ è anch'essa in $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Allora per ogni $\phi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ esiste l'integrale

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} dx \ ,$$

che chiamiamo trasformata di Fourier di ϕ in $\mathbb{R}^N$. Perciò per ogni $\phi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ esiste la trasformata di Fourier

$$\hat{\phi}(k) = \mathcal{F}\phi(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} dx$$

Esempio 1a. Sia

$$\phi(x) = \chi_{[-u,u]}(x) \begin{cases} 1 & x \in [-u,u] \\ 0 & x \in [-u,u]^c \end{cases}$$

funzione caratteristica dell'intervallo $[-u,u]$. Allora

$$\mathcal{F}\chi_{[-u,u]}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-u,u]}(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^{u} e^{-ikx} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(ku)}{k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ku)}{k}$$

Esempio 1b. Sia

$$\phi(x) = \chi_{[a,b]}(x) \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & x \in [a,b]^c \end{cases}$$

funzione caratteristica dell'intervallo $[a,b]$. Allora

$$\mathcal{F}\chi_{[a,b]}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-ikx} dx =$$

$$= \left(x = y + \frac{a+b}{2} \right) = \frac{e^{-i\frac{a+b}{2}}}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} e^{-iky} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(k\frac{b-a}{2})}{k} e^{-i\frac{a+b}{2}}$$

Osserviamo che per ogni intervallo $[a,b]$, $\hat{\chi}$ è una funzione continua e che $\hat{\chi}(k) \to 0$ per $|k| \to +\infty$

Teorema. (Riemann-Lebesgue) La trasformata di Fourier di una funzione $\phi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ è una funzione continua. Inoltre $\hat{\phi}(k) \to 0$ per $|k| \to +\infty$.

Dimostrazione. (cenni) La continuita è conseguenza del Teorema di convergenza dominata. Il fatto che $\hat{\phi}$ sia infinitesima all'infinito si ottiene tenendo presente che il risultato è vero per le funzioni caratteristiche di intervalli, e quindi per le funzioni semplici che sono loro combinazioni lineari. Queste ultime sono dense in $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Si potrebbe sviluppare la teoria della trasformata di Fourier in $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N)$; tuttavia, come mostrano gli esempi precedenti, la trasformata di un elemento in $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N)$ non è necessariamente integrabile, e quindi ci sarebbero delle difficoltà nello sviluppo della relazione fra trasformata e antitrasformata di Fourier. La situazione, da questo punto di vista, sarebbe molto più soddisfacente se si scegliesse di ambientare la teoria nello spazio (di Hilbert) $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^N)$ una volta superato il problema di definire la trasformata stessa. Tuttavia qui siamo interessati a definire la trasformata di Fourier nell'ambito della teoria delle distribuzioni e quindi seguiremo una strada differente.

La definizione naturale di trasformata di Fourier di una distribuzione sarebbe, mimando

altre definizioni che estendono alle distribuzioni concetti classici, la seguente:
se T è una distribuzione, la trasformata di Fourier di T è la distribuzione tale che

$$\mathcal{F}T(\phi) = T(\mathcal{F}\phi) \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}$$

D'altra parte, come si può facilmente verificare, se $\phi \in \mathcal{D}$, e in particolare a supporto compatto, $\mathcal{F}\phi(k)$ è una funzione analitica di k e non può essere a supporto compatto (a meno che non sia identicamente nulla).
Perciò la definizione proposta va modificata.
Più precisamente, occorre definire un nuovo spazio di funzioni test che abbia la proprieta che la trasformata di Fourier di ogni suo elemento sia ancora una funzione test. Si otterra conseguentemente un nuovo spazio di distribuzioni, che saranno ora funzionali lineari continui su uno spazio di distribuzioni differente da $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Queste distribuzioni, dette distribuzioni **temperate**, costituiscono un sottoinsieme proprio dello spazio delle distribuzioni, ma hanno la proprietà di ammettere sempre trasformata di Fourier.
Il nuovo spazio di funzioni test è lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}$ delle funzioni a decrescenza rapida.
Definizione. Si dice **Spazio di Schwartz** $\mathcal{S}$ delle funzioni a decrescenza rapida l'insieme delle funzioni (reali o complesse) $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^k |D^\alpha \phi(x)| \leq C_{k,\alpha}$$

$\forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ multindice e $\forall k \in \mathbb{N}$. $C_{k,\alpha}$ è una costante dipendente da k, α e ϕ. In altre parole si tratta di funzioni regolari in $\mathbb{R}^n$ che convergono a zero, esse e le loro derivate, più rapidamente di ogni potenza inversa di $|x|$ all'infinito.
Naturalmente $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. L'inclusione è stretta.
Ad esempio $\phi(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ma non è a supporto compatto.
Analogamente $\phi(x) = e^{-x^2} P(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\forall P$ polinomio.

Lo spazio di Schwartz è dotato di un concetto di convergenza.
Definizione. Diciamo che la successione $\{\phi_n\} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ converge in $\mathcal{S}$ a $\phi \in \mathcal{S}$ se le derivate di tutti gli ordini delle ϕ_n convergono uniformemente alle corrispondenti derivate di ϕ e le costanti $C_{k\alpha}$ nelle limitazioni

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^k) |D^\alpha \phi_n(x)| \leq C_{k,\alpha}$$

possono essere scelte indipendenti da n.

Quest'ultima condizione nella definizione di convergenza è analoga a quella, data per successioni convergenti di $\mathcal{D}$, secondo cui la successione ϕ_n di elementi di $\mathcal{D}$ ammette un compatto K che contiene i supporti di tutte le ϕ_n.

Definiamo ora le distribuzioni temperate come funzionali lineari continui su $\mathcal{S}$.
Definizione. Una distribuzione temperata T su $\mathbb{R}^n$ è un funzionale lineare $\phi \to T(\phi)$ continuo su $\mathcal{S}$:

$$T\phi_n \to T\phi \;\text{ se }\; \phi_n \to \phi \;\; n \to \infty \;\text{ in } \mathcal{S}\ .$$

L'insieme delle distribuzioni temperate si indica con $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Una successione $\{T_n\} \subset S'(\mathbb{R}^n)$ converge a $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ se

$$T_n(\phi) \to T(\phi) \text{ per } n \to \infty \qquad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Ogni distribuzione temperata definisce una distribuzione, e $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è un sottospazio lineare di $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Inoltre la convergenza in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ implica quella in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Notiamo però che le funzioni $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, cioè le distribuzioni regolari, non sono necessariamente temperate. Ad esempio si può facilmente dimostrare che la distribuzione regolare che coincide con la funzione $f(x) = e^x$ <u>non</u> è una distribuzione temperata.

Torniamo alla Trasformata di Fourier. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ e quindi per ogni elemento di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è ben definita la trasformata di Fourier attraverso la definizione usuale:

$$\hat{\phi}(k) = \mathcal{F}\phi(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} dx$$

Veniamo ora alle proprietà della trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
Teorema. Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Inoltre $\mathcal{F}$ è una mappa continua di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in se stessa. Valgono inoltre le seguenti identità

$$\begin{array}{ll} a) & D^\alpha f(\xi) = \mathcal{F}\left[(-ix)^\alpha f\right](\xi) \\ b) & (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}\left[D^\alpha f\right](\xi) \end{array}$$

<u>Osservazioni</u> Le identità citate mostrano che la trasformata di Fourier trasforma operatori di derivazione in operatori di moltiplicazione e viceversa. Questo fatto è fondamentale nello studio delle equazioni a derivate parziali.

<u>Dimostrazione</u> Differenziando

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}) dx$$

Si ha

$$D^\alpha \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{x}} (-ix)^\alpha f(\vec{x}) dx$$

lecita perchè $(-ix)^\alpha f(x)$ è in $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$. Perciò $\hat{f}$ è regolare e vale la a). Integrando per parti quante volte occorre

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}} (-i\xi)^\alpha f(\vec{x}) dx$$

si ottiene l'identità a). Perciò si ottiene

$$\xi^\beta D^\alpha \hat{F}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}} D^\beta \left[(-i\xi)^\alpha f(x)\right] dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}} g(x) dx$$

dove g è di classe Schwartz.
Dunque $\sup |\xi^\beta D^\alpha \hat{F}(\xi)| \leq G \sup \prod (1 + |x_i|^2) |g(x)|$ e questo mostra che $\mathcal{F}$ mappa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e che è una mappa continua.
In effetti vale molto di più:
Teorema. Sia $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora esiste una funzione $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tale che $g = \mathcal{F}(f)$.

In altre parole $\mathcal{F}$ è una mappa invertibile su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e la trasformata di Fourier inversa di g, $\mathcal{F}^{-1}g$, è data dalla formula

$$f(\vec{x}) = \mathcal{F}^{-1}(g) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{\xi}} g(\xi) d\xi$$

<u>Osservazione 1</u> Si noti che $\mathcal{F}^{-1}$ differisce da $\mathcal{F}$ per il segno ad esponente in $e^{i\vec{x}\cdot\vec{\xi}}$ sotto l'integrale.

<u>Osservazione 2</u> É vero anche $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}u = u$. Dunque ogni funzione di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è la trasformata di Fourier della propria antitrasformata, e viceversa.
Teorema. (Proprietà della trasformata di Fourier in $\mathcal{S}$)
Siano $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:
a) $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}v = \int_{\mathbb{R}^n} u\hat{v}$
b) $\int_{\mathbb{R}^n} u\overline{v} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\overline{\hat{v}}$ (identità di Parseval)
c) $(u * v)\hat{=}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{u}\hat{v}$
d) $\hat{u} * v = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{u}\hat{v}$
Commenti. La proprietà a) dice tra l'altro che la trasformata di Fourier di una fissata funzione di Schwartz è identificabile (via teorema di annullamento) con la distribuzione regolare che si ottiene integrando la fissata funzione contro la trasformata di Fourier della generica funzione di Schwartz:

$$T_{\mathcal{F}(u)}(v) = T_u(\mathcal{F}(v)) \ .$$

Questa è la relazione che, generalizzata, consentirà di introdurre la trasformata di Fourier di qualunque distribuzione temperata.
Si ricordi che la convoluzione $u * v$ è definita da

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy$$

ed esiste sempre per $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. L'integrale a secondo membro converge assolutamente e il teorema di convergenza dominata mostra che $u * v$ è continua e tende a zero per $|x| \to +\infty$. La derivazione sotto il segno di integrale è ammessa tante volte quante si vuole e quindi $u * v \in C^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$, inoltre

$$D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v = u * (D^\alpha v)$$

Più precisamente, si può dimostrare che la convoluzione è una mappa continua

$$* : S \times S \to S$$

Abbiamo già incontrato la convoluzione in più occasioni. Il potenziale Newtoniano di una distribuzione ρ di massa o carica,

$$u(x) = c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy$$

è la convoluzione della distribuzione di massa o carica con la soluzione fondamentale del laplaciano.

4.1. **Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate.** La trasformata di Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ si estende ad una mappa lineare $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ attraverso la definizione

$$(\mathcal{F}T)(\phi) = T(\mathcal{F}\phi) \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}$$

Analogamente

$$\mathcal{F}^{-1}T(\phi) = T(\mathcal{F}^{-1}\phi) \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}$$

Anche in $\mathcal{S}'$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ sono una l'inversa dell'altra:

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T(\phi) = \mathcal{F}T(\mathcal{F}^{-1}\phi = T(\mathcal{F}\mathcal{F}^-1\phi) = T(\phi)$$

Per definizione, $\mathcal{F}$ è una mappa continua in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Esempio. Calcoliamo la trasformata di Fourier della delta di Dirac. Dalla definizione, deve aversi

$$(\mathcal{F}\delta)(\phi) = \delta(\mathcal{F}\phi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \phi(x)\ dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}$$

Dunque la trasformata di Fourier della delta di Dirac è la distribuzione regolare (e costante)

$$\mathcal{F}\delta = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

Esempio. Calcolare la trasformata distribuzionale di una funzione costante. Soluzione:

$$\mathcal{F}1 = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta_0$$

Esempio. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione di Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

La trasformata di Fourier non esiste in senso classico perchè $\theta \notin \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. D'altra parte $\theta = \lim_{\epsilon \to 0} G_\epsilon$.

$$G_\epsilon(x) = \begin{cases} e^{-\epsilon x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}G_\epsilon(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx-\epsilon x} \frac{dx}{\sqrt{(2\pi)}} = \left[\frac{e^{(-ik-\epsilon)x}}{\sqrt{2\pi}(-ik-\epsilon)} \right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ik+\epsilon}$$

$G_\epsilon \to^{\mathcal{S}'} \theta$ poichè $(G_\epsilon - \theta)(\phi) = \int_0^{+\infty}(e^{-\epsilon x} - 1)(\phi(x))dx \to_{\epsilon\to 0^+} 0$ Ne segue $\lim_{\epsilon\to 0^+} \mathcal{F}G_\epsilon(k) = \mathcal{F}\theta(x)$.

La relazione fra derivazione e moltiplicazione si estende alle distribuzioni:

$$\mathcal{D}^\alpha u = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}u$$

e analogamente si estendono le proprietà relative a traslazioni e dilatazioni.

4.2. **Convoluzione di distribuzioni.** Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ti si dice nullo nell'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se $T(\phi) = 0 \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n)$ con $\mathrm{supp}(\phi) \in \Omega$ (il supporto di una funzione ϕ è la chiusura dell'insieme dei punti per cui è diversa da zero).
Si dice supporto della distribuzione T il più piccolo sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ fuori dal quale T è nulla.
Esempio. supp $\delta_0 = \{0\}$. Infatti se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{supp}(\phi) \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$, si ha

$$\delta_0(\phi) = \phi(0) = 0$$

Siano ora T, S distribuzioni temperate, almeno una delle quali sia a supporto compatto. Consideriamo la mappa

$$\phi \in S(\mathbb{R}^n) \to T_x\left(S_y\left(\phi\left(x+y\right)\right)\right)\ ,$$

doe il pedice x o y indica la variabile rispetto a cui opera la ditribuzione. Questa è una distribuzione temperata che si indica con $T * S$ e si chiama **convoluzione di T ed S**. Per giustificare questa definizione, consideriamo tre funzioni di classe Schwartz, f, g and ϕ. Allora la convoluzione $f * g$ è ben definita, ed è una funzione di classe C^∞, quindi una distribuzione regolare. Possiamo valutarla contro una funzione di classe Schwartz, ottenendo

$$\begin{aligned}(f*g)(h) &= \int\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(s-y)g(y)\,dy\right)\phi(s)\,ds \\ &= \int\int f(s-y)g(y)\phi(y)\,dy\,ds \\ &= \int\int f(s-y)g(y)\phi(s)\,ds\,dy \\ &= \int\int f(x)g(y)\phi(x+y)\,dx,\,dy \\ &= f(x)((g(y)(\phi(x+y))).\end{aligned}$$

o anche,

$$T_{f*g}(\phi) = (T_f)_x((T_g)_y(\phi(x+y)))$$

Dunque per funzioni regolari, la convoluzione può essere definita in modo equivalente attraverso la formula precedente; mentre però la definizione usuale non si estende a distribuzioni, questa ammette in modo spontaneo una estensione, tramite la definizione appena data.

Esempio. sia $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e T_{δ_0}.
Allora $\delta_0 * S = S * \delta_0 = \mathcal{S}$.
Infatti

$$\delta_{0x}\left(S_y\left(\phi\left(x+y\right)\right)\right) = S_y\phi(y)$$
$$\delta_{0x}\left(S_y\left(\phi\left(x+y\right)\right)\right) = S_x\phi(x)$$

Teorema. Se S e T sono distribuzioni temperate e una di esse almeno ha supporto compatto allora valgono le seguenti proprietà:
a) $\partial^\alpha(S * T) = (\partial^\alpha S) * T = S * (\partial^\alpha T)$
b) $\mathcal{F}(S * T) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}S\mathcal{F}T$

Le due proprietà precedenti sono fondamentali nello studio delle equazioni a derivate parziali.
Molti problemi di equazioni a derivate parziali si presentano sotto la forma seguente. É dato l'operatore differenziale a derivate parziali

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$$

con α multiindice, a_α costanti; P dunque è un polinomio in più variabili.
Assegnata $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si chiede di determinare $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$P(\partial)u = f$$

In particolare, se $f = \delta_0$ una distribuzione temperata E tale che $P(\partial)E = \delta_0$ si dice **soluzione fondamentale di** $P(\partial)$.
Se E è una soluzione fondamentale, $E + u$ con $P(\partial)u = 0$ è anch'essa soluzione fondamentale.
Inoltre, grazie alla parte a) del teorema precedente, se E è soluzione fondamentale di $P(\partial)$, $E * f$ è soluzione di $P(\partial)u = f$.

Ad esempio, se Φ è la soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace (cambiato di segno), ovvero se

$$-\Delta\Phi = \delta_0$$

allora una soluzione dell'equazione di Poisson

$$-\Delta u = \rho$$

è data da $u = \Phi * \rho$; in tre dimensioni, se ρ è una distribuzione a supporto compatto o è una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^3)$ questa convoluzione assume la forma classica e già più volte citata

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy \ .$$

Supponiamo ora che $|P(-ix)| \geq \epsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Allora il problema

$$P(\partial)u = f$$

ammette una e una sola soluzione in $\mathcal{S}'$. Infatti effettuando la trasformata di Fourier di ambo i membri dell'equazione si ottiene

$$\mathcal{F}P(\partial)u = \mathcal{F}f$$
$$P(-ik)\mathcal{F}u = \mathcal{F}f \ ;$$

ne segue che la trasformata di Fourier della soluzione, $\mathcal{F}u$, soddisfa una equazione algebrica, la cui soluzione è

$$\mathcal{F}u = \frac{\mathcal{F}f}{P(-ik)}$$

Ora $P^{-1}(-ik) \in C^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$ per l'ipotesi fatta, ed è limitata.
Ne segue che $\frac{\mathcal{F}f}{P(-ik)}$, prodotto di una funzione limitata di classe C^∞ per una distribuzione temperata, è essa stessa una distribuzione temperata e dunque ammette una trasformata di Fourier inversa,

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}f}{P(-ik)}\right)$$

che fornisce la soluzione del problema.
Quando la condizione $P(-ik) \geq \epsilon > 0$ è violata il problema non ha soluzione unica e risulta assai più complesso da studiare.

Quale è la trasformata di Fourier della soluzione fondamentale Φ del Laplaciano? In base alla discussione precedente, abbiamo l'identità

$$\mathcal{F}\Phi = \frac{\mathcal{F}\delta_0}{P(-ik)}$$

con $P(-ik) = |k|^2$, e $\mathcal{F}\delta_0 = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$; pertanto, risulta

$$\mathcal{F}\Phi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{1}{|k|^2}$$

A questo risultato si può pervenire anche utilizzando la definizione, e lo studente è invitato a farlo.

Concludiamo questo paragrafo con una proprietà importante della trasformata di Fourier di distribuzioni a supporto compatto.
Teorema. Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto.
Allora $\mathcal{F}T$ è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, e posto

$$e_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-ik\cdot x}$$

si ha

$$\mathcal{F}T = \langle T, e_k(x)\rangle = T(e_k(x))$$

La dimostrazione è semplice ma omessa. Si noti che $e_k(x)$ non è una funzione test o di classe Schwartz, ma l'azione di T su $e_k(x)$ è ben definita grazie alla compattezza del supporto di T (le distribuzioni a supporto compatto sono di fatto, i funzionali lineari continui su C^∞, ma non entriamo in dettagli).

Si può verificare per esercizio che il teorema precedente fornisce il corretto risultato per la trasformata di Fourier della distribuzione delta di Dirac, già calcolata facendo uso della definizione.
Un altro esempio meno ovvio è il seguente. Sia data la distribuzione temperata

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \ni \phi \longmapsto \sigma_R(\phi) = \int_{|x|=R} \phi(x) d\sigma_x \ .$$

Come è immediato verificare, σ_R è una distribuzione a supporto compatto dato dalla sfera di raggio R in $\mathbb{R}^3$ e centro l'origine (per ogni funzione di Schwartz con supporto esterno a $\partial B_R(0)$ l'integrale è nullo). Vogliamo calcolare la trasformata di Fourier di σ_R. Vale il seguente
Lemma

$$\hat{\sigma}_R(k) = \hat{\sigma}_R(|k|) = \frac{2R}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\sin(R|k|)}{|k|}$$

Dimostrazione.

$$\hat{\sigma}_R(\phi) = \sigma_R(\hat{\phi}) = \int_{|k|=R} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik\cdot x} \phi(x) dx \right) d\sigma_k = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{|k|=R} e^{-ik\cdot x} d\sigma_k \right) \phi(x) dx$$

da cui segue che $\hat{\sigma}_R$ è assegnata dalla distribuzione regolare

$$\hat{\sigma}_R(|k|) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{|k|=R} e^{-ik\cdot x} d\sigma_k \ ,$$

che ora ci accingiamo a calcolare esplicitamente. Poiché il prodotto scalare $k \cdot x$ è invariante per rotazioni, è sufficiente calcolare l'integrale per un vettore k con direzione fissata, ad esempio $k = (0, 0, |k|)$. Passando a coordinate sferiche si ottiene

$$\hat{\sigma}_R(|k|) = \frac{R^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-i|k|R\cos\theta} \ \sin\theta \ d\theta \ d\phi = \frac{R^2}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\pi} e^{-i|k|R\cos\theta} \ \sin\theta \ d\theta = \frac{2R}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sin(|k|R)}{|k|}$$

come si voleva provare.
Osserviamo infine che è spontaneo attribuire il nome di *media sferica* alla distribuzione a supporto compatto

$$M_R(\phi) = \frac{1}{4\pi R^2} \sigma_R(\phi) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|x|=R} \phi(x) d\sigma_x \tag{4.1}$$

Dai risultati precedenti, risulta che la trasformata di Fourier della media sferica è data da

$$\hat{M}_R = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sin(|k|R)}{R|k|} \tag{4.2}$$

La trasformata di Fourier appena calcolata tornerà utile nello studio della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde.

5. L'equazione delle onde

Siamo interessati a due problemi significativi.
Il primo è il problema di Cauchy per l'equazione omogenea

$$\begin{cases} \Box u &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= v_0(x) \end{cases} \tag{5.1}$$

Si indica, al solito, con $\Box$ l'operatore di D'Alembert

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \ .$$

Il secondo problema è il cosiddetto problema di radiazione, ovvero il problema inomogeneo con dati nulli

$$\begin{cases} \Box u &= f(x,t) \\ u(x,0) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Per linearità, la somma delle soluzioni dei due suddetti problemi è la soluzione del problema generale

$$\begin{cases} \Box u &= f(x,t) \\ u(x,0) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= v_0(x) \end{cases} \tag{5.3}$$

Cominciamo ad esaminare la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione omogenea. Supporremo inizialmente che i dati iniziali u_0 e v_0 siano a decrescenza rapida. Questo suggerisce di prendere in considerazione la trasformata di Fourier (nella sola variabile spaziale) della soluzione, $\mathcal{F}u(k,t) = \hat{u}(k,t)$.
Sottolineiamo che nell'effettuare la trasformata di Fourier spaziale della funzione u, il tempo t è un parametro.
Grazie alle proprietà della trasformata di Fourier, in particolare grazie al fatto che l'imagine dell'operatore laplaciano, come abbiamo già visto, è la moltiplicazione per $|k|^2$ la funzione $\hat{u}$ soddisfa un problema di Cauchy per una equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}\hat{u} + c^2|k|^2\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k,0) = \hat{u}_0(k) \\ \frac{d}{dt}\hat{u}(k,0) = v_0(k) \end{cases} \tag{5.4}$$

Si tratta dell'equazione differenziale per un oscillatore armonico di pulsazione $c|k|$, la cui soluzione è ben nota:

$$\hat{u}(k,t) = \cos(c|k|t)\hat{u}_0(k) + \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}v_0(k) \tag{5.5}$$

La soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde omogenea è dunque l'antitrasformata di Fourier della funzione $\hat{u}(k,t)$ data dalla 5.5. Per ogni stante di tempo

fissato, la 5.5 definisce una funzione di classe Schwartz, e quindi l'antitrasformata di Fourier è istante per istante di classe Schwartz. Grazie al teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, si vede anche che come funzione del tempo, l'antitrasformata di Fourier della 5.5 è continua e differenziabile (quante volte si vuole), e in particolare soddisfa nel limite per $t \to 0$ le condizioni iniziali. Pertanto si può concludere che l'antitrasformata di Fourier della 5.5 è regolare sia nello spazio che nel tempo, e soddisfa il problema 5.1.
Il problema è ora quello di determinare una rappresentazione esplicita della soluzione, ovvero di eseguire l'antitrasformata di Fourier per ottenere la soluzione in termini dei dati iniziali nella loro forma originaria (ovvero come funzioni dello spazio) e delle variabili spaziotemporali.
A tale scopo, osserviamo che, utilizzando la linearità di $\mathcal{F}$ e il legame tra prodotto e convoluzione, si ottiene (con leggero abuso di notazione)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\cos(c|k|t)\hat{u}_0(k) + \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}v_0(k)\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\mathcal{F}^{-1}\left[\cos(c|k|t)\right] * u_0(x) + \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}\right] * v_0(x) \end{aligned}$$

Il problema è dunque rimandato al calcolo delle due antitrasformate di Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\cos(c|k|t)\right] \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}\right] \ .$$

Osserviamo intanto che essendo

$$\cos(c|k|t) = \frac{d}{dt}\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|} \ ,$$

è sufficiente effettuare solamente il calcolo della seconda antitrasformata. Poichè la funzione

$$|k| \mapsto \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}$$

non è integrabile su $\mathbb{R}^n$ per nessun n, non esiste l'antitrasformata di Fourier in senso classico, a prescindere dalla dimensione; occorre pertanto attribuire alla trasformata (e antitrasformata) di Fourier il significato distribuzionale. Nel seguito ci limiteremo alla discussione dei casi di dimensione $1, 2$ e 3. In dimensione superiore la discussione diventa più delicata e per essi si rimanda alla letteratura citata in bibliografia.
Cominciamo dal caso più semplice, quello unidimensionale.
In questo caso è possibile fare ricorso al risultato elementare

$$\mathcal{F}\chi_{[-u,u]} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(ku)}{k} \ .$$

Nella precedente poniamo $u = ct$ e dunque

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{c}\chi_{[-ct,ct]}$$

Notiamo ora che

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}v_0 * \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}\right] &= \frac{1}{2c}v_0 * \chi_{[-ct,ct]} = \frac{1}{2c}\int_{\mathbb{R}} v_0(y)\chi_{[-ct,ct]}(x-y)dy \\ &= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)dy\end{aligned}$$

dove le ultime due uguaglianze valgono se, ad esempio, v_0 è una funzione localmente integrabile. Per quanto riguarda il primo addendo si ha, nel senso della teoria delle distribuzioni,

$$\mathcal{F}^{-1}[\cos(c|k|t)] = \frac{d}{dt}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}\right] = \frac{d}{dt}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{c}\chi_{[-ct,ct]}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{c}\left[c\delta_{ct} + c\delta_{-ct}\right] \ .$$

Corrispondentemente,

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}u_0 * \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{c}\left[c\delta_{ct} + c\delta_{-ct}\right] = \frac{1}{2}\left[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right]$$

dove l'ultima identità vale (ad esempio) se il dato iniziale è una funzione continua.
Dunque per dati iniziali classici, si ottiene la ben nota rappresentazione della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde unidimensionale,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)dy \ . \tag{5.6}$$

Tuttavia questa formula risolve l'equazione delle onde nel senso della teoria delle distribuzioni per dati assai più generali di quelli per cui esistono soluzioni classiche (ovvero, ricordiamo, $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$).
Ad esempio, se $u_0 \in C^0(\mathbb{R})$ e $v_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ la 5.6 è ancora una soluzione (distribuzionale) di 5.1.
Ancora più in generale, la distribuzione

$$\frac{1}{2}u_0 * \left[\delta_{ct} + \delta_{-ct}\right] + \frac{1}{2c}v_0 * \chi_{[-ct,ct]} \tag{5.7}$$

è una rappresentazione valida della soluzione (distribuzionale) del problema di Cauchy per l'equazione delle onde 5.1 per dati iniziali in una classe amplissima, che virtualmente comprende tutte le distribuzioni temperate per cui la formula stessa ha senso.
Passiamo ora al caso tridimensionale. Il calcolo esplicito di $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}\right]$ si può effettuare ma è delicato. Anche in questo caso procediamo ricostruendo l'antitrasformata a partire da risultati già noti. Nel paragrafo precedente, si è visto che la trasformata di Fourier della distribuzione a supporto compatto data dalla valutazione sulla sfera di raggio R è data dalla

$$\hat{\sigma}_R(k) = \hat{\sigma}_R(|k|) = \frac{2R}{(2\pi)^{1/2}}\frac{\sin(R|k|)}{|k|} \ ;$$

se nella precedente poniamo $R = ct$, si ottiene

$$\hat{\sigma}_{ct}(k) = \hat{\sigma}_{ct}(|k|) = \frac{2ct}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\sin(c|k|t)}{|k|} \tag{5.8}$$

e da questa segue

$$\frac{(2\pi)^{1/2}}{2c^2 t} \hat{\sigma}_{ct}(k) = \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|} \tag{5.9}$$

e passando all'antitrasformata, (sempre con abuso di notazione)

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}\right] = \frac{(2\pi)^{1/2}}{2c^2 t} \sigma_{ct} = (2\pi)^{3/2} \frac{t}{4\pi(ct)^2} \sigma_{ct} = (2\pi)^{3/2} t M_{ct} \tag{5.10}$$

dove con M_{ct} si indica la distribuzione di media sferica.
Consideriamo ora la convoluzione con il dato iniziale.

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}\right] * v_0 = t M_{ct} * v_0 \tag{5.11}$$

Identifichiamo la distribuzione $M_{ct} * v_0$.
Supponendo che $v_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ ha per definizione di convoluzione di distribuzioni (lecita perché una delle due è a supporto compatto)

$$\begin{aligned}
M_{ct} * v_0(\phi) &= \frac{1}{4\pi(ct)^2} \int_{|x|=ct} \left(\int_{\mathbb{R}^3} v_0(y)\phi(x+y)\ dy \right)\ d\sigma_x = (x+y=z) \\
&= \frac{1}{4\pi(ct)^2} \int_{|x|=ct} \left(\int_{\mathbb{R}^3} v_0(z-x)\phi(z)\ dz \right)\ d\sigma_x \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4\pi(ct)^2} \int_{|x|=ct} v_0(z-x)\ d\sigma_x \right) \phi(z)\ dz = (z-x=u) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4\pi(ct)^2} \int_{|u-z|=ct} v_0(u)\ d\sigma_u \right) \phi(z)\ dz\ .
\end{aligned}$$

Ne segue che la convoluzione della media sferica con una distribuzione regolare v_0 è la distribuzione regolare data dalla media sferica di v_0 sulla sfera di centro z e raggio ct:

$$M_{ct} * v_0(x) = \frac{1}{4\pi(ct)^2} \int_{|u-x|=ct} v_0(u)\ d\sigma_u = M_{ct}(v_0)(x) \tag{5.12}$$

E' opportuno chiarire che $M_{ct} * v_0(x)$ (se v_0 è una distribuzione regolare) è una funzione del punto x che costituisce il centro della sfera su cui è mediata la funzione v_0 e del raggio ct di tale sfera.
Si ha poi

$$\mathcal{F}^{-1}[\cos(c|k|t)] = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}\right] = \frac{\partial}{\partial t}((2\pi)^{3/2} t M_{ct}) \tag{5.13}$$

e

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathcal{F}^{-1}[\cos(c|k|t)u_0(k)] = \frac{\partial}{\partial t}(tM_{ct}) * u_0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(tM_{ct} * u_0\right) \tag{5.14}$$

Si ha dunque, per la soluzione generale del problema di Cauchy 5.1 la rappresentazione

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(tM_{ct} * u_0(x)\right) + tM_{ct} * v_0(x) \tag{5.15}$$

o esplicitamente

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|u-x|=ct} u_0(u)d\sigma_u\right) + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|u-x|=ct} v_0(u)d\sigma_u \tag{5.16}$$

La formula precedente, dovuta a Kirchhoff e detta talvolta formula delle medie sferiche, fornisce la soluzione classica del problema di Cauchy per dati sufficientemente regolari. Si prova che tale rappresentazione è una soluzione classica di 5.1 in tre dimensioni spaziali se valgono le ipotesi $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ e $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^3)$.
Veniamo ora al problema inomogeneo o di radiazione, ovvero alla soluzione del problema dato da 5.2.
Anche per esso si studia preliminarmente il corrispondente problema per la trasformata di Fourier (spaziale) della soluzione, che indichiamo ancora con il simbolo $\hat{u}(k,t)$. Questa risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}\hat{u} + c^2|k|^2\hat{u} & = \hat{f}(k,t) \\ \hat{u}(k,0) = 0 & \\ \frac{d}{dt}\hat{u}(k,0) = 0 & \end{cases} \tag{5.17}$$

la cui unica soluzione è data dall'espressione

$$\hat{u}(k,t) = \int_0^t \frac{\sin(c|k|(t-s))}{c|k|}\hat{f}(k,s)\ ds \tag{5.18}$$

Occorre ora antitrasformare il secondo membro. Studiamo in dettaglio il caso tridimensionale.
Si ha

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\int_0^t \frac{\sin(c|k|(t-s))}{c|k|}\hat{f}(k,s)\ ds = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(c|k|(t-s))}{c|k|}\hat{f}(k,s)\right]\ ds$$

e utilizzando la 5.10

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(c|k|(t-s))}{c|k|}\hat{f}(k,s)\right] &= (2\pi)^{3/2}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(c|k|(t-s))}{c|k|}\right] * \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(k,t) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2(t-s)}\sigma_{c(t-s)} * f \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione in variabili spazio temporali è data da (qui $t \geq 0$)

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2(t-s)}\sigma_{c(t-s)} * f \, ds = \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2(t-s)} \int_{|y-x|=c(t-s)} f(y,s) \, dy \ ,$$

e infine, posto $c(t-s) = u$ e scrivendo l'integrale iterato come un integrale sul cono $|x-y| \leq ct$,

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c} \int_{|x-y|\leq ct} \frac{f(y, t-|x-y|/c)}{|x-y|} \, dy \qquad (t \geq 0) \ . \tag{5.19}$$

La formula precedente è detta *potenziale ritardato* della distribuzione f, perchè in esso compare l'integrazione sulla f calcolata al *tempo ritardato* $t - |x-y|/c$, ovvero il tempo impiegato dalla perturbazione ondosa a percorrere la distanza che intercorre tra il punto di sorgente y (su cui si integra) e il punto di campo x.
Il potenziale ritardato della sorgente f è una soluzione classica dell'equazione inomogena non appena la sorgente soddisfa $f \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)$ (si veda, ad esempio, Vladimirov)
In modo analogo, la soluzione per tempi negativi è data dai *potenziali anticipati*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c} \int_{|x-y|\leq -ct} \frac{f(y, t+|x-y|/c)}{|x-y|} \, dy \qquad (t \leq 0) \tag{5.20}$$

nella quale compare il *tempo anticipato* $t + |x-y|/c$.
I potenziali ritardati e anticipati sono la parte della soluzione dell'equazione inomogenea che dipende dalla sorgente, mentre i dati iniziali compaiono nella formula di Kirchhoff delle medie sferiche. Precisamente, possiamo concludere che il problema di Cauchy generale

$$\begin{cases} \Box u & = & f \\ u(x,0) & = & u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & v_0(x) \end{cases} \tag{5.21}$$

nelle ipotesi $f \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ha soluzione classica per tempi positivi $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)$ con la rappresentazione esplicita
(5.22)

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|x-y|=ct} u_0(u) d\sigma\right) + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|x-y|=ct} v_0(u) d\sigma + \int_{|x-y|\leq ct} \frac{f(y, t-|x-y|/c)}{4\pi c|x-y|} \, dy$$

E' facile verificare che se il problema di Cauchy è assegnato ad un tempo t_0 non nullo, vale un risultato analogo con la rappresentazione della soluzione data da

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2(t-t_0)}\int_{|x-y|=c(t-t_0)} u_0(y) d\sigma\right) + \frac{1}{4\pi c^2(t-t_0)}\int_{|x-y|=c(t-t_0)} v_0(y) d\sigma \\ &+ \int_{|x-y|\leq c(t-t_0)} \frac{f(y, t-|x-y|/c)}{4\pi c|x-y|} \, dy \end{aligned}$$

Si noti che se $t_0 \to -\infty$, il dominio di integrazione nel potenziale ritardato può essere preso come l'intero $\mathbb{R}^3$, e la soluzione ritardata descrive l'influenza della sorgente per tutti i

tempi. Questa situazione è quella che tipicamente si incontra quando si trattano problemi di *scattering*, nella quale è assegnata la radiazione incidente asintoticamente nel passato, e si è interessati al comportamento a tempi finiti, o asintoticamente nel futuro. In tal caso tuttavia occorre prestare attenzione alla descrizione dei dati iniziali e della loro evoluzione, perchè il problema di Cauchy a $t_0 = -\infty$ è non standard e ha una sua propria trattazione (si veda ad esempio Vajnberg, in Egorov-Subin). Analoghe osservazioni valgono per tempi negativi: la soluzione anticipata ha dominio di integrazione l'intero $\mathbb{R}^3$ e descrive l'influenza della sorgente per tutti i tempi se $t_0 \to +\infty$. Si tratta della situazione in cui la radiazione è assegnata asintoticamente nel futuro, e la si vuole conoscere a tempi finiti (o a tempi remoti nel passato, cioe per $t \to -\infty$).

Il problema inomogeneo unidimensionale è più semplice da trattare, e viene lasciato per esercizio.

Si troverà che la soluzione diel problema di Cauchy completo in una dimensione, il sistema 5.21, è data dall'espressione

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[u_0(x-ct)+u_0(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)dy \\ &+ \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\; dyds \end{aligned}$$

Tale soluzione è classica nelle ipotesi $f \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$, $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$.

E' invece una soluzione distribuzionale per dati iniziali (ad esempio) $u_0 \in C^0(\mathbb{R})$ e $v_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ e sorgente $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$